EXAMEN DU TRANSFERTS THERMIQUES (S5)

EXERCICE 01

Soit un cylindre creux de conductivité thermique $\lambda = 30\left[W/(m.K)\right]$ et de longueur de 1 m, défini par un rayon intérieur R_1= 2 cm et un rayon extérieur R_2 = 6 cm. Ce cylindre est le siège d'une génération de chaleur interne non uniforme de la forme $S_g = 3.10^7 r^2$.

Les conditions aux limites sont :

- $T(R_1) = T_1 = 120$ °C
- $T(R_2) = T_2 = 50$°C

1/Établir l'équation du profil de température T(r).

2/ Calculer le flux thermique pour $r=R_2$

3/Si la paroi externe soumet à une condition d'adiabacité, déterminer dans ce cas la température externe.

EXERCICE 02

On étudie le refroidissement d'une pomme assimilée à une sphère parfaite de diamètre D = 5 cm. Elle a Initialement une température uniforme T_i = 30 °C, elle est brusquement placée dans une chambre froide ventilée maintenue à une température de 5 °C.

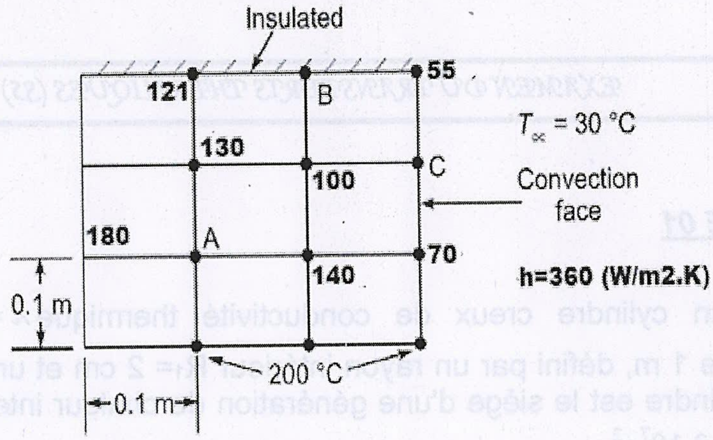
1/Déterminer la température de la pomme après 10 minutes d'exposition au réfrigérateur, en supposant que le coefficient d'échange par convection est 6.5 W/m². K

2/Déterminez le temps nécessaire pour que la température de la pomme atteigne 13°C .

3/En réalité le coefficient de convection est h = 9.6 W/m².K.Quelle sera dans ce cas la température au centre de la pomme après 2 heures passées dans la chambre froide ? **On donne :** $\rho = 993\left[kg/m^3\right], C_p = 4187\left[J/kg.K\right], \lambda = 0.72\left[W/m.K\right]$

EXERCICES 03

Soit le schéma présenté sur la figure suivante



En supposant qu'il n'y a pas de source de chaleur et le régime est stationnaire

-Calculer les températures aux neouds A, B et C.

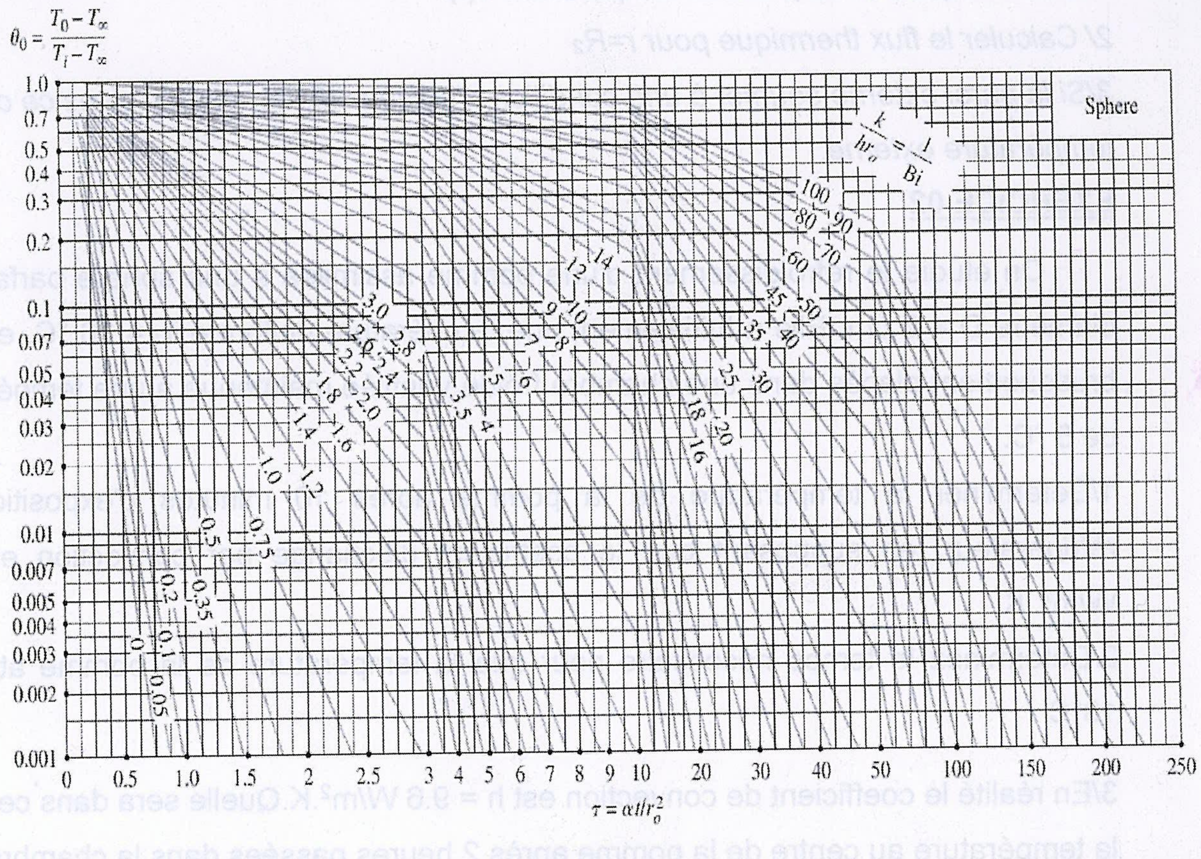


Fig 1. Température de la sphère

BON COURAGE

Corrigé type du transfert thermique

Niveau : L3 PE

A.U : 2025/2026.

EX01 : $\lambda = 30 [W/(m \cdot K)]$; $R_1 = 2\,cm$, $R_2 = 6\,cm$

$S_g = 3 \cdot 10^7 r^2$.

$T(r = R_1) = 120°C$

$T(r = R_2) = 50°C$

1/ Etablissement de l'eqt de la temperature :

$$\lambda\left(\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr}\right) + S_g = 0 \Rightarrow \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = \frac{-S_g}{\lambda} = \frac{-3 \cdot 10^7 r^2}{30}$$

donc $\boxed{\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = -10^6 r^2.}$

2°/ Resolution de l'eqt :

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = -10^6 r^2.$$

on recherche de la solution homogène :

$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = 0$; posons $\frac{dT}{dr} = u$ on aura :

$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0$ donc : $u = \frac{c}{r}$ avec $(c \in \mathbb{R})$.

$u = \frac{c}{r} = \frac{dT}{dr} \Rightarrow \boxed{T_H = C_1 \ln r + C_2}$

- La solution particulière est de la forme :

$u_p = \frac{C(r)}{r} \Rightarrow \frac{du_p}{dr} = \frac{C'r - C}{r^2}$

donc

$$\frac{du}{dr}+\frac{u}{r}=-10^6r^2 \Rightarrow \frac{c'r-c}{r^2}+\frac{c}{r^2}=-10^6r^2 \text{ Alors:}$$

$$\frac{c'r-c+c}{r^2}=-10^6r^2 \text{ c.à.d } \frac{c'}{r}=-10^6r^2$$

donc, on peut trouver $C(r)$.

$$C(r)=+\int -10^6r^3\,dr=\frac{-10^6r^4}{4}$$

$$u_p=\frac{C(r)}{r}=\frac{-10^6r^3}{4}=-25*10^4r^3$$

$$\frac{dT_p}{dr}=u_p=-25*10^4r^3 \rightarrow \boxed{T_p=-6,25*10^4*r^4}$$

donc la solution totale est:

$$T_g=T_H+T_p=c_1\ln r+c_2-6,25*10^4*r^4$$

$$\boxed{T_g=c_1\ln r+c_2-62500r^4} \quad ;(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2.$$

$$T_1=T(R=0,02\,m)=120=c_1\ln(0,02)+c_2-62500(0,02)^4$$

$$T_2=T(R=0,06\,m)=50=c_1\ln(0,06)+c_2-62500(0,06)^4$$

par soustraction, on obtient:

$$\boxed{c_1=-62,93}\,(°C/m)$$

$$c_2=120-c_1\ln(0,02)+62500(0,02)^4$$

$$\Longrightarrow \boxed{c_2=-126,172\,(°C)}$$

Flux thermique pour $R = R_2$:

$$\phi = -\lambda \frac{dT}{dr} \cdot S'$$

$$\phi = -\lambda \left(\frac{c_1}{R_2} - 4 \times 62500 R_2^3 \right) * 2\pi R_2 \cdot L$$

$$\phi = -30 \left[\left(\frac{-62,93}{0,06} - 2500 (0,06)^3 \right] * 6,28 * 0,06 * 1 \right.$$

$$\phi = 11862,112 \, [W]$$

3°/ Temperature externe si $(\varphi_{R_2} = 0)$:

$$-\lambda \frac{dT}{dr}\bigg|_{r=R_2} = 0 \Rightarrow \frac{c_1}{r} - 2500 r^3 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = 2500 R^4 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0,324 \, \frac{°C}{m}}$$

$$\text{donc } c_2 = 120 - 0,324 \ln(0,02) + 62500 (0,02)^4$$

$$\Rightarrow \boxed{c_2 = 121,27 \; °C}$$

$$\text{donc } T(r = 0,06) = -0,324 \ln(r) + 121,27 - 62500 r^4$$

$$\text{donc } \boxed{T(r = R_2) = 119,54 \simeq 120 °C}$$

<u>EX02 :</u> $D = 0,05 m$; $T_i = 30°C$, $T_\infty = 5°C$

$\Delta t = 10 * 60 = 600 (s)$ et $h = 6,5 \, [W/(m^2 \cdot K)]$.

1°/ Temperature de la pomme

on calcule le nombre de Biot.

$$Bi = \frac{hL_c}{\lambda} \text{ avec } L_c = \frac{V}{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2} = \frac{R}{3} = 0,0083 m$$

$$Bi = \frac{6,5 * 0,083}{0,72} = 0,075 < 0,1 \ ; \ \tau = \frac{\rho c_p L_c}{h} = 53304$$

donc le sys est mince.

Alors $T(t) = (T_i - T_\infty) e^{-t/\tau} + T_\infty$

$$T(t = 600s) = (30 - 5) e^{-600/53304} + 5$$

$$\boxed{T(600s) = 27,33°C}$$

2°/ Calcul du temps

$$t = -\tau \ln\left(\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty}\right)$$

donc

$$t = -53304 \ln\left(\frac{13-5}{30-5}\right)$$

$$t = 6073,64 (s)$$

3°/ Calcul de la temperature

on calcul le nombre de Biot

$Bi = \frac{hL_c}{\lambda} = 0,111 > 0,1$. le sys est epais

on utilise les graphe

on recalcule le nombre de Bi par

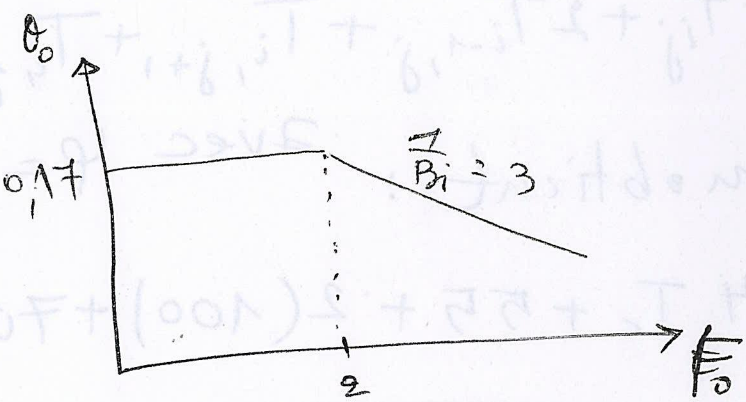
$$Bi = \frac{h \cdot R}{\lambda} = 0,333$$

Le nombre de Fourier

$$F_o = \frac{\alpha t}{r^2} \text{ avec } \alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p} = \frac{0,72}{993 * 4187} = 1,73 * 10^{-7}$$

donc

$$\boxed{F_o = 1,995 \simeq 2}$$



donc

$$\theta = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0,17 \Rightarrow$$

$$T_o = 0,17(T_{in} - T_\infty) + T_\infty = 9,25°C$$

Exercice 3 $\Delta x = \Delta y = 0,1m$ et $\lambda = 50\left(\frac{w}{m.k}\right)$

Noeud A

$$-4T_A + 180 + 200 + 140 + 130 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T_A = 162,50°C}$$

Nœud B :

$$-4T_\beta + 121 + 2(100) + 55 = 0 \Rightarrow \boxed{T_\beta = 94°C}$$

Neoud C :

on applique l'éq^t

$$-4T_{ij} + 2T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + \frac{2\varphi\Delta y}{\lambda} = 0$$

avec $\varphi = h(T_\infty - T_{ij})$

on obtient :

$$-4T_c + 55 + 2(100) + 70 + 2h(T_\infty - T_c)\frac{\Delta y}{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T_c = 67{,}68°C}$$