Faculty of Material Sciences.
Department of Physics.
1st year Master's in Materials Physics 2025-2026

Examen final de : Traitement du signal

Durée : 2h.

Questions de cours : choisissez une (01) seule réponse (6 pts)

1. Un signal est dit déterministe si :
   a) Il est toujours périodique.
   b) Sa moyenne est nulle.
   c) Il peut être prédit exactement à tout instant.
   d) Il dépend du hasard.
2. Un signal est un signal d'énergie si :
   a) Son énergie est infinie.
   b) Sa puissance moyenne est non nulle.
   c) Son énergie est finie.
   d) Il est périodique.
3. Un filtre passe-bas RC a une fréquence de coupure $f_c = 1kHz$. Quelle affirmation est correcte à $f = f_c$?
   a) Le gain vaut 0 dB.
   b) Le déphasage vaut −60°.
   c) Le gain vaut −3 dB.
   d) Le déphasage vaut −90°.
4. Un filtre analogique du 2^0 ordre est caractérisé par :
   a) Un seul pôle.
   b) Un pôle et un zéro.
   c) Deux pôles.
   d) Une pente fixe de −20 dB/décade.
5. Soit $F(p) = \dfrac{2}{p(p+1)}$. Quelle est la valeur de : $\lim_{t\to\infty} f(t)$
   a) 0.
   b) 1.
   c) 2.
   d) Elle n'existe pas.
6. Soit $x[n]$ est réel, alors :
   a) $X[k]$ est réel.
   b) $X[k] = X[N-k]$.
   c) $X[k] = X^*[N-k]$.
   d) $X[k]$ est pair.

Exercice 01 : (4 pts)

1. Représenter les signaux suivants :

$$x(t) = 2rect(t-1)+3tri\left(\frac{t+4}{2}\right) \quad ; \quad y(t) = u(t-3)+2u(t+2)$$

2. Calculer la transformée de Fourier de $x(t)$ et $y(t)$?

Exercice 02 : (4 pts)

1. Retrouver l'original des transformées de *Laplace* suivantes :

$$X(p)=\frac{1}{(p+1)(p-2)} \quad ; \quad Y(p)=\frac{-1}{(p-2)^2}.$$

Exercice 03 : (6 pts)

Soit $x[n]=[1,-1,0,0,1,0,1,-1]$.

1. Calculez la TFD de $x[n]$?
2. Calculer le module (spectre) et la phase de $x[n]$?
3. Représenter le module (spectre) ?

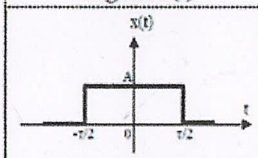
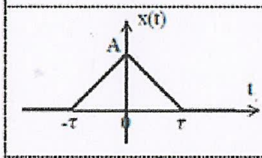
NB : On donne la formule de la TFD : $X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\times e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

Le module : $|X(k)| = \sqrt{\mathrm{Re}(X(k))^2 + \mathrm{Im}(X(k))^2}$

La phase : $\mathrm{Phase}(X(k)) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(X(k))}{\mathrm{Re}(X(k))}\right)$

Formules

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = < x, \exp(j2\pi ft) > = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)dt.$$

Signal x(t)	Expression de x(t)	Transformée de Fourier
	$A.rect\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$A\tau.sinc(\tau f)$
	$A.tri\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$A\tau.sinc^2(\tau f)$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} |x(t)|^2\, dt < \infty, \quad P \neq 0$$

$$\boxed{F(p) = \frac{A}{p-p_1} + \frac{B}{p-p_2} + \frac{C}{p-p_3} + \cdots + \frac{Z}{p-p_n}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= F(p).(p-p_1)|_{p=p_1} \\ B &= F(p).(p-p_2)|_{p=p_2} \\ C &= F(p).(p-p_3)|_{p=p_3} \end{aligned}}$$

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\, dt$$

$f(t), t \geq 0$	$F(p)$
Impulsion de Dirac $\delta(t)$	1
Echelon unitaire $u(t)$	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$t.e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^n.e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$

$f(t), t \geq 0$	$F(p)$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$t.\sin(\omega t)$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t.\cos(\omega t)$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$e^{-at}.\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}.\cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

Faculty of Material Sciences.
Department of Physics.
1st year Master's in Materials Physics 2025-2026

Sol-Examen final de : Traitement du signal

Durée : 2h.

Questions de cours : choisissez une (01) seule réponse (6 pts)

1. Un signal est dit déterministe si :
   a) Il est toujours périodique.
   b) Sa moyenne est nulle.
   c) Il peut être prédit exactement à tout instant.
   d) Il dépend du hasard.
2. Un signal est un signal d'énergie si :
   a) Son énergie est infinie.
   b) Sa puissance moyenne est non nulle.
   c) Son énergie est finie.
   d) Il est périodique.
3. Un filtre passe-bas RC a une fréquence de coupure $f_c = 1kHz$. Quelle affirmation est correcte à $f = f_c$?
   a) Le gain vaut 0 dB.
   b) Le déphasage vaut −60°.
   c) Le gain vaut −3 dB.
   d) Le déphasage vaut −90°.
4. Un filtre analogique du 2^0 ordre est caractérisé par :
   a) Un seul pôle.
   b) Un pôle et un zéro.
   c) Deux pôles.
   d) Une pente fixe de −20 dB/décade.
5. Soit $F(p) = \dfrac{2}{p(p+1)}$. Quelle est la valeur de : $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$
   a) 0.
   b) 1.
   c) 2.
   d) Elle n'existe pas.
6. Soit $x[n]$ est réel, alors :
   a) $X[k]$ est réel.
   b) $X[k] = X[N-k]$.
   c) $X[k] = X^*[N-k]$.......
   d) $X[k]$ est pair.

Exercice 01 : (4 pts)

1. Représenter les signaux suivants :

$$x(t) = 2rect(t-1)+3tri\left(\frac{t+4}{2}\right) \quad ; \quad y(t) = u(t-3)+2u(t+2)$$

2. Calculer la transformée de Fourier de $x(t)$ et $y(t)$?

1) Représentation temporelle

- $x(t) = 2\,\mathrm{rect}(t-1) + 3\,\mathrm{tri}\left(\frac{t+4}{2}\right)$
  - $2\,\mathrm{rect}(t-1)$: porte de **largeur** 1, centrée en $t = 1$, amplitude 2 → non nulle sur $[0{,}5,\ 1{,}5]$.
  - $3\,\mathrm{tri}\left(\frac{t+4}{2}\right)$: triangle de **base 2, centré en** -4, amplitude max 3 → non nul sur $[-5,\ -3]$.

  Les deux morceaux sont **disjoints** (aucun recouvrement temporel).
- $y(t) = u(t-3) + 2u(t+2)$
  - $u(t-3)$: échelon qui s'enclenche à $t = 3$ (vaut 1 pour $t \geq 3$).
  - $2u(t+2)$: échelon de hauteur 2 qui s'enclenche à $t = -2$.

---

2) Transformées de Fourier

Convention (fiche) : $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt.$

Paires utiles : $\mathrm{rect}(t/T) \leftrightarrow T\,\mathrm{sinc}(fT)$ et $\mathrm{tri}(t/T) \leftrightarrow T\,\mathrm{sinc}^2(fT)$.

Décalage temporel $t_0 \Rightarrow$ facteur $e^{-j2\pi ft_0}$. Tutorial Test 1

a) $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$

- $\mathcal{F}\{2\,\mathrm{rect}(t-1)\} = 2\cdot 1\cdot \mathrm{sinc}(f)\, e^{-j2\pi f\cdot 1} = 2\,\mathrm{sinc}(f)\, e^{-j2\pi f}$.
- $\mathcal{F}\{3\,\mathrm{tri}((t+4)/2)\} = 3\cdot \left[2\,\mathrm{sinc}^2(2f)\right]\cdot e^{-j2\pi f(-4)} = 6\,\mathrm{sinc}^2(2f)\, e^{j8\pi f}$.

Donc

$$\boxed{X(f) = 2\,\mathrm{sinc}(f)\, e^{-j2\pi f} \;+\; 6\,\mathrm{sinc}^2(2f)\, e^{j8\pi f}}$$

avec $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. Tutorial Test 1

b) $Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\}$

Les signaux en **échelon** ne sont pas intégrables au sens de Fourier (puissance infinie) : la TF **n'existe pas** au sens classique (elle n'existe qu'au sens distribution). On préfère la **Laplace** pour ces signaux. La fiche donne la table de Laplace et l'usage de $u(t)$. Tutorial Test 1

(À titre indicatif : $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = e^{-ap}/p$ pour $a > 0$; ainsi $\mathcal{L}\{y(t)\} = \dfrac{e^{-3p}}{p} + \dfrac{2e^{2p}}{p}$, région de convergence adaptée.) Tutorial Test 1

---

3) Puissance moyenne totale finie de $x(t)$

Exercice 02 : (4 pts)

1. Retrouver l'original des transformées de *Laplace* suivantes :

$$X(p) = \frac{1}{(p+1)(p-2)} \;;\quad Y(p) = \frac{-1}{(p-2)^2}.$$

a) $X(p) = \dfrac{1}{(p+1)(p-2)}$

Éléments simples (cf. modèle $\dfrac{A}{p-p_1} + \dfrac{B}{p-p_2}$ sur ta feuille). Tutorial Test 1

$$\frac{1}{(p+1)(p-2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-2} \quad\Rightarrow\quad 1 = A(p-2) + B(p+1).$$

En posant $p = 2 \Rightarrow B = \frac{1}{3}$ et $p = -1 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$.

Donc

$$X(p) = -\frac{1}{3}\frac{1}{p+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{p-2}.$$

Retour à l'original (table de Laplace : $\mathcal{L}^{-1}\{1/(p-a)\} = e^{at}u(t)$). Tutorial Test 1

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{3}\left(e^{2t} - e^{-t}\right) u(t)}.$$

(ROC causale : $\Re(p) > 2$ pour que les deux termes soient à droite.)

b) $Y(p) = -\dfrac{1}{(p-2)^2}$

On utilise la paire standard (ou la propriété de dérivation) :

$$\mathcal{L}\{t\,e^{at}u(t)\} = \frac{1}{(p-a)^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-a)^2}\right\} = t\,e^{at}u(t).$$

(Table Laplace / propriétés sur ta fiche.) Tutorial Test 1

Donc, avec $a = 2$ et le signe «–» :

$$\boxed{y(t) = -\,t\,e^{2t}\,u(t)}.$$

Si tu veux, je peux aussi vérifier ces résultats par **décomposition** et **propriété** $\mathcal{L}\{t f(t)\} = -\frac{d}{dp}F(p)$ pas à pas.

Exercice 03 : (6 pts)

Soit $x[n] = [1, -1, 0, 0, 1, 0, 1, -1]$.

1. Calculez la TFD de $x[n]$?
2. Calculer le module (spectre) et la phase de $x[n]$?
3. Représenter le module (spectre) ?

NB : On donne la formule de la TFD : $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \times e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

Le module : $|X(k)| = \sqrt{\mathrm{Re}(X(k))^2 + \mathrm{Im}(X(k))^2}$

La phase : $\mathrm{Phase}(X(k)) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(X(k))}{\mathrm{Re}(X(k))}\right)$

On a $N = 8$ et

$$x[n] = [1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ -1]$$

(avec la convention donnée : $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$).

1) Calcul de la TFD $X[k]$

Les seuls échantillons non nuls sont : $x[0] = 1,\ x[1] = -1,\ x[4] = 1,\ x[6] = 1,\ x[7] = -1.$

Donc :

$$X[k] = 1 - e^{-j\frac{2\pi}{8}k} + e^{-j\frac{2\pi}{8}4k} + e^{-j\frac{2\pi}{8}6k} - e^{-j\frac{2\pi}{8}7k}$$

En évaluant pour $k = 0, \dots, 7$, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} X[0] &= 1 \\ X[1] &= -\sqrt{2} + j \\ X[2] &= 1 \\ X[3] &= \sqrt{2} - j \\ X[4] &= 5 \\ X[5] &= \sqrt{2} + j \\ X[6] &= 1 \\ X[7] &= -\sqrt{2} - j \end{aligned}}$$

(Et comme $x[n]$ est réel, on observe bien la symétrie : $X[7] = X[1]^*$, $X[5] = X[3]^*$.)

---

2) Module $|X[k]|$ et phase $\angle X[k]$

Module

$$|X[k]| = \sqrt{\Re(X[k])^2 + \Im(X[k])^2}$$

- $|X[0]| = 1$
- $|X[1]| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$
- $|X[2]| = 1$
- $|X[3]| = \sqrt{3}$
- $|X[4]| = 5$
- $|X[5]| = \sqrt{3}$
- $|X[6]| = 1$
- $|X[7]| = \sqrt{3}$

$$\boxed{|X[k]| = [1,\ \sqrt{3},\ 1,\ \sqrt{3},\ 5,\ \sqrt{3},\ 1,\ \sqrt{3}]}$$

Phase

$$\angle X[k] = \arg(X[k]) = \arctan\left(\frac{\Im(X[k])}{\Re(X[k])}\right)$$

(en tenant compte du **bon quadrant**)

Posons $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 0.61548 \text{ rad} \approx 35.264°$.

Alors :

$$\boxed{\begin{aligned}
&\angle X[0] = 0\\
&\angle X[1] = \pi - \alpha \approx 2.52611 \text{ rad } (144.736°)\\
&\angle X[2] = 0\\
&\angle X[3] = -\alpha \approx -0.61548 \text{ rad } (-35.264°)\\
&\angle X[4] = 0\\
&\angle X[5] = +\alpha \approx +0.61548 \text{ rad } (35.264°)\\
&\angle X[6] = 0\\
&\angle X[7] = -(\pi - \alpha) \approx -2.52611 \text{ rad } (-144.736°)
\end{aligned}}$$

3) Représenter le module (spectre)

Pour un tracé "stem" (bâtons), tu places les points $(k,\ |X[k]|)$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
(	X[k]	)	1	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	5	$\sqrt{3}$