



Année Universitaire 2025–2026
Examen de moyenne durée de physique statistique

(Durée 2h00, 22/01/2026)

Exercice n°01

- 1° Calculer la trajectoire de phase de l'oscillateur harmonique linéaire.
- 2° Tracer la trajectoire dans l'espace des phases et trouver la surface limitée par cette trajectoire.
- 3° Donner l'énergie classique de l'oscillateur et montrer qu'elle est proportionnelle à la surface déjà calculée. Trouver le facteur de proportionnalité.

Exercice n° 02

1° Considérons une particule de masse m libre de se déplacer à l'intérieur d'une boîte cubique de côté L .

- a- calculer le volume de l'espace de phase $\Omega(E)$ correspondant à une énergie de la particule inférieure à E .
- b- Donner pour la même particule la fonction $\phi(E)$ et montrer qu'elle est proportionnelle à $\Omega(E)$. Donner le facteur de proportionnalité.
- a- Trouver en fonction de $\Omega(E)$ le nombre d'états $\Gamma(E)$ dont l'énergie comprise entre E et $E+dE$

2° Considérons un gaz parfait monoatomique formé de N particules confinées dans une boîte cubique de côté L . N est supposé ici être de l'ordre du nombre d'avogadro.

- a- Calculer le nombre d'états $\Gamma(E)$ dont l'énergie comprise entre E et $E+dE$

On donne le volume d'une sphère de rayon R dans un espace à n dimension.

$$V_n = C_n R^n \quad \text{avec} \quad C_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

- b- Calculer l'entropie de ce gaz en fonction de E .
- c- Déterminer la température T du gaz à l'équilibre puis exprimer son énergie en fonction de la température.
- d- Déterminer la pression du gaz et déduire l'équation du gaz dans ce cas.

Exercice n°03

On considère des événements possibles $n=0,1,\dots,N$ et la distribution de probabilité de Boltzmann associée à la température T , suivante : $p_n = \frac{1}{z} e^{-\beta n}$ avec $\beta = \frac{1}{k_B T}$

1° Calculer la fonction de partition z en fonction de β . Nous rappelons l'expression de la somme d'une suite géométrique : $\sum_{i=0}^N a^i = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$.

2° En déduire l'expression de la fonction de partition pour un oscillateur harmonique quantique décrit par la distribution de Boltzmann d'un ensemble canonique. Nous rappelons que les niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique quantiques sont : $E_n = h\nu \left(n + \frac{1}{2} \right)$. Exprimer le résultat en fonction de $\sinh\left(\frac{\beta h\nu}{2}\right)$.

3° L'ensemble grand canonique est un ensemble statistique, dans lequel chaque système est en équilibre avec un réservoir externe d'énergie et de particules. Cela signifie que le système peut échanger de l'énergie et des particules avec le réservoir, autrement dit, l'énergie et le nombre de particules sont alors amenés à fluctuer. On considère un gaz parfait formé de particules identiques de masse m dans une boîte de volume V .

1. Calculer la grande fonction de partition du gaz.

On donne : $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^i}{i!} = e^f$

Bon courage



Corrigé de l'Examen de moyenne durée de physique statistique (L3 PM et PF / (S5 2026)

Exercice n°01 (06 points)

01- L'espace des phases est de deux dimension ($x, p_x=m\dot{x}$) 0.25

En appliquant le principe fondamental de la dynamique $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ 0.25

$$m\ddot{x} = -kx \Leftrightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \quad 0.25$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad 0.25, \text{ en posant } \omega = \frac{k}{m} \quad 0.25 \text{ l'équation différentielle devient :}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad 0.25$$

On obtient une équation différentielle de deuxièmes degrés dont la solution est de la forme :

$x = A \sin(\omega t + \varphi)$ 0.25 avec A est l'amplitude de vibration, ω est la pulsation et φ est le déphasage.

$$p_x = m\dot{x} = mA\omega \cos(\omega t + \varphi) \quad 0.25$$

A partir des équation paramétriques de x et de p_x , on peut facilement obtenir l'équation de la trajectoire, comme suit : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{p_x^2}{(Am\omega)^2} = 1$, 0.50 qui est une trajectoire d'une ellipse avec des demi axe a et b dont $a=A$ et $b=Am\omega$ et de centre (0,0). 0.25

02- Surface limitée par cette trajectoire :

La surface d'une ellipse est donnée par la relation suivante ;

$$S = \pi ab = \pi A^2 m \omega \quad 0.25$$

L'énergie classique de l'oscillateur harmonique est :

$E = E_c + E_p$ 0.25 avec $E_p = -\int f_x dx = \int kx dx = \frac{1}{2}kx^2$ 0.25 d'où l'énergie classique est :

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante} \quad 0.50$$

03- De l'équation de la trajectoire on obtient la valeur de x :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{p_x^2}{(Am\omega)^2} = 1 \quad 0.50$$

$x = A \sqrt{1 - \frac{p_x^2}{(Am\omega)^2}}$ 0.25 par substitution dans l'équation de l'énergie classique on obtient :

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kA^2 \left(1 - \frac{p_x^2}{(Am\omega)^2}\right) \quad 0.25$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kA^2 - \frac{1}{2} kA^2 \frac{p_x^2}{(Am\omega)^2} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kA^2 - \frac{1}{2} kA \frac{p_x^2}{(m\omega)^2} \text{ et comme } \omega = \frac{k}{m}$$

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kA^2 - \frac{1}{2} k \frac{p_x^2}{m^2 \omega^2} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kA^2 - \frac{1}{2} k \frac{p_x^2}{m^2 \frac{k}{m}} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kA^2 - \frac{1}{2} \frac{p_x^2}{m} = \frac{1}{2} kA^2 \quad 0.50 \text{ on avait}$$

déjà : $S = \pi A^2 m \omega$ d'où on en déduit :

$$E = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} k \frac{S}{\pi m \omega} = \frac{1}{2} k \frac{S}{\pi m} \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{2} \frac{S}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\omega}{2\pi} S = vS \quad 0.5 \text{ avec } v \text{ est la fréquence de vibration.}$$

Exercice 02 (08 points)

I a- Calcul du volume de l'espace des phase que je note $\Omega(E)$

$\Omega(E) = \int_{\text{contrainte}} d\tau$ 0.25 avec $d\tau$ est le volume infinitésimale de l'espace des phases. On est à trois dimensions ce qui implique que l'espace des phases est à 6 dimensions .

$d\tau = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ 0.25 avec les contraintes suivante : $0 \leq x \leq L$; $0 \leq y \leq L$ et $0 \leq z \leq L$ et pour

l'énergie on a : $\frac{p^2}{2m} \leq E \Leftrightarrow p^2 \leq 2mE$ 0.25

$$\Omega(E) = \int_{\text{contrainte}} dx dy dz dp_x dp_y dp_z = V \int_{p^2 \leq 2mE} dp_x dp_y dp_z \quad 0.25$$

$$\Omega(E) = V \cdot V_{\text{sphère}} \quad 0.25 \text{ } V_{\text{sphère}} \text{ est le volume d'une sphère de rayon } R = \sqrt{2mE}$$

$$\Omega(E) = V \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = V \cdot \frac{4}{3} \pi (2mE)^{\frac{3}{2}} \quad 0.25 \text{ , Par conséquent le nombre de micro états inférieur à } E \text{ est :}$$

$$\varphi(E) = \frac{\Omega(E)}{h^3} = \frac{V}{h^3} \cdot \frac{4}{3} \pi (2mE)^{\frac{3}{2}} \quad 0.50 \text{ Le facteur de proportionnalité est } \frac{1}{h^{3N} \cdot 1!} \quad 0.25$$

c- On a le nombre de micro états dont l'énergie est comprise entre E et E+dE est:

$$\Gamma(E) = \frac{d\varphi(E)}{dE} \delta E = \frac{V}{h^3} \cdot \frac{4}{3} \pi (2m)^{\frac{3}{2}} (E)^{\frac{3}{2}-1} \frac{3}{2} \delta E = \varphi(E) \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\delta E}{E} \quad 0.50$$

2°

Considérons un gaz parfait constitué de N particules sans interaction dans une boîte de côté L

$$E = E_c = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} \quad 0.25$$

l'espace des phases est à 6N dimensions. Dans le cas de N particules :

$$a- \Omega(E) = \int_{\text{contrainte}} d\tau = \int_{\text{contrainte}} \prod_i^N dx_i dy_i dz_i dp_{xi} dp_{yi} dp_{zi} \quad 0.25$$

$$= V^N \int_{p^2 \leq 2mE} \prod_i^N dp_x dp_y dp_z = V^N \cdot V_{\text{SPHERE}} \quad 0.50 ; V_{\text{SPHERE}} \text{ est le volume}$$

de la sphère de rayon R à 3N dimension.

On a le volume d'une sphère de R et de dimension n est donnée par la relation suivante :

$$V = \frac{\pi^{n/2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} R^n ; \text{ nous on est dans le cas d'une sphère de rayon } R = (2mE)^{\frac{1}{2}} \text{ et de dimension } 3N \quad 0.25$$

$$V = \frac{\pi^{3N/2}}{\left(\frac{3N}{2}\right)!} (2mE)^{\frac{3N}{2}} \text{ donc : } \Omega(E) = \frac{\pi^{3N/2}}{\left(\frac{3N}{2}\right)!} (2mE)^{\frac{3N}{2}} \cdot V^N \quad 0.25$$

$$\Rightarrow \varphi(E) = \frac{\Omega(E)}{h^{3N} \cdot N!} = \frac{\pi^{3N/2} (2mE)^{\frac{3N}{2}} \cdot V^N}{h^{3N} \cdot N! \left(\frac{3N}{2}\right)!} \quad 0.25 \text{ Avec } N! \text{ est attribué à } N \text{ particules}$$

indiscernables identique.

$$\Gamma(E) = \frac{d\varphi(E)}{dE} \delta E = \varphi(E) \cdot \frac{3N}{2} \cdot \frac{\delta E}{E} \quad 0.50$$

b- L'entropie du gaz homogène est S : $S = k \log \Gamma(E) \approx k \log \varphi(E)$ 0.25 pour N très grand.

$$S = k \left\{ \frac{3N}{2} \log (2\pi mE) + N \log(V) - 3N \log h - \log N! - \log \frac{3N}{2}! \right\} \quad 0.25 , \text{ en appliquant la}$$

formule de Stirling on obtient la relation suivante :

$$S_{\text{hom}} = k \left\{ \frac{3N}{2} \log (2\pi mE) + N \log(V) - 3N \log h - N \log N + N - \frac{3N}{2} \log \frac{3N}{2} + \frac{3N}{2} \right\} \quad 0.25$$

$$\Gamma(E) = \frac{d\varphi(E)}{dE} \delta E \quad 0.25 \text{ on peut aisément vérifier que } k \log \varphi(E) = k \log \Gamma(E) \quad 0.25$$

$$S_{\text{hom}} = k \left\{ \frac{3N}{2} \log (2\pi mE) + N \log(V) - 3N \log h - N \log N + N - \frac{3N}{2} \log \frac{3N}{2} + \frac{3N}{2} \right\}$$

$$= Nk \left\{ \frac{3}{2} \log (2\pi mE) + \log(V) - 3 \log h - \log N + 1 - \frac{3}{2} \log \frac{3N}{2} + \frac{3}{2} \right\}$$

0.25

$$= Nk \left\{ \log \frac{V}{N} + \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \log \frac{4\pi mE}{3N h^2} \right\} \quad 0.25$$

4° La relation entre la temperature et l'entropie : on sait que : $\frac{1}{T} = \frac{\partial S_{\text{hom}}}{\partial E}$ 0.25 On peut écrire que :

$$S_{\text{hom}} = Nk \left\{ \log \frac{V}{N} + \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \log \frac{4\pi mE}{3N h^2} \right\} \cdot 0.50 = \text{constant} + \frac{3Nk}{2} \log E \quad 0.25$$

les autres termes ne dépendent pas de l'énergie. $\frac{1}{T} = \frac{\partial S_{hom}}{\partial E} = \frac{3Nk}{2} \frac{\partial}{\partial E} (\log E) = \frac{3Nk}{2} \cdot \frac{1}{E} \Rightarrow E = \frac{3}{2} NkT.$

0.50

5° La pression du gaz est : $\frac{P}{T} = \frac{\partial S_{hom}}{\partial V}$ 0.25 Avec dans ce cas ; $S_{hom} = \text{constante} + Nk \log V$

$\Rightarrow \frac{P}{T} = \frac{Nk}{V}$ 0.25 D'où l'équation d'état d'un gaz parfait est $PV=NkT.$ 0.25

Exercice 3° (06 points)

1° $\sum_{n=0}^N p_n = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} \sum_{n=0}^N \exp(-\beta n) = 1$ 0.25 $\Rightarrow z = \sum_{n=0}^N \exp(-\beta n) \Rightarrow z = \frac{1 - e^{-\beta(N+1)}}{1 - e^{-\beta}}$ 0.50

2° $\rho = \frac{1}{z} \exp(-\beta H)$ avec $z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta \epsilon_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\beta h\nu \left(n + \frac{1}{2}\right)\right)$ 0.50

$z = \exp\left(\frac{-\beta h\nu}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta h\nu n) = \exp\left(\frac{-\beta h\nu}{2}\right) \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-\beta h\nu(N+1)}}{1 - e^{-\beta h\nu}} = \exp\left(\frac{-\beta h\nu}{2}\right) \cdot \frac{1}{1 - e^{-\beta h\nu}}$ 0.50

$z = \frac{1}{\exp\left(\frac{\beta h\nu}{2}\right) - \exp\left(\frac{-\beta h\nu}{2}\right)} = \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{\beta h\nu}{2}\right)}$ 0.25

3° la fonction grand canonique est donnée par : $Z_G = \sum_N \sum_{\{j\}} \sum_i e^{-\beta(\epsilon - \mu N)}$ 0.25

$Z_G = \sum_N e^{+\beta \mu N} \cdot \sum_{\{j\}} \sum_i e^{-\beta \epsilon} = \sum_N e^{+\beta \mu N} \cdot z_c$ 0.50

avec z_c est la fonction de partition canonique .

Calcul de la fonction de partition canonique pour une particule :

$z_c = \frac{1}{N!} \cdot \frac{\int \partial \tau}{h^3} e^{-\beta \epsilon} = \frac{1}{N!} \cdot \frac{\int \partial r \cdot \partial p}{h^3} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} = \frac{1}{h^3} \iiint dr \iiint e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \cdot dp$ 0.50

on obtient alors que :

$z_c = \frac{V}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \cdot dp = \frac{V}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{p_x^2}{2m}} \cdot dp_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{p_y^2}{2m}} \cdot dp_y \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta \frac{p_z^2}{2m}} \cdot dp_z$ 0.50

$z_c = \frac{V}{h^3} \cdot \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2}$ avec $a = \frac{\beta}{2m}$ 0.25

Donc : $z_c = \frac{V}{h^3} \cdot \left(\frac{\pi}{a}\right)^{3/2} = \frac{V}{h^3} \cdot \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} = \frac{V}{h^3} \cdot (2\pi m k_B T)^{3/2}$ 0.50

Pour N particules indiscernables on : $Z_N = (z_c)^N = \frac{1}{N!} \frac{V^N}{h^{3N}} \cdot (2\pi m k_B T)^{3N/2}$ 0.50

Pour la fonction grand canonique , on a alors : $Z_G = \sum_N e^{+\beta \mu N} \frac{1}{N!} \frac{V^N}{h^{3N}} \cdot (2\pi m k_B T)^{3N/2}$ 0.25

$$Z_G = \sum_N \frac{\left(e^{+\beta\mu} \frac{V}{h^3} \cdot (2\pi m k_B T)^{3/2} \right)^N}{N!} \quad \mathbf{0.25} \quad \text{Or on a déjà : } \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^i}{i!} = e^f \text{ donc , on obtient:}$$

$$Z_G = \exp \left(e^{+\beta\mu} \cdot \frac{V}{h^3} \cdot (2\pi m k_B T)^{3/2} \right) \quad \mathbf{0.50}$$