Faculté des Sciences de la Matière
Département de Physique

Examen de physique statistique S5 (2025/2026)

3ème Année Physique Energétique

Durée 2h00

Questions de cours

- Soit $P_n(N)$ une distribution binomiale, montrer que $\bar{n} = NP_A$
- Pour un système micro-canonique, montrer les relations suivantes:
- $\bar{\mathrm{E}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} ln(Z)$
- $S = \frac{\bar{\mathrm{E}}}{\mathrm{T}} + K_b \mathrm{T} \ln(\mathrm{Z})$
- $\mathrm{F} = -K_b \mathrm{T} \ln(\mathrm{Z})$

Ou Z est la fonction de partition.

Ex 01:

Soit une distribution Gaussienne: $\mathrm{w(x)} = \mathrm{A} \exp\left(-\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^2}{2\sigma}\right)$

avec $\mathrm{A} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$

- Sans faire le calcule donner la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{w(x)\,dx}$
- Calculer $\bar{\mathrm{x}}$ (On donne $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha\, \mathrm{x}^2)\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$)

Ex 02:

Soient 05 particules réparties sur trois niveaux d'énergie comme se suit: une particule sur le premier niveau, trois particules sur le deuxième niveau et une particule dans le troisième niveau. Calculer le nombre de configurations W possible. Calculer l'entropie S de ce système.

Ex 03:

Calculer la fonction de partition d'une molécule possédant un nombre infini de niveau d'énergie non dégénérés régulièrement espacés. Calculer l'énergie moyenne correspondante et donner les limites à basse et à haute température. Calculer la capacité calorifique.

Ex 04 :

On considère la détente de Joule d'un gaz parfait de N molécules. Le gaz occupe le compartiment A, de volume V_0 au départ, et les compartiments A+B, de volume $3V_0$ dans l'état final.

a) Combien de particule occupe chaque compartiment à l'état final?

b) Quelle est la probabilité pour qu'une molécule soit dans le compartiment A dans l'état final ? En déduire la probabilité pour que les N molécules initiales soient toutes rassemblés dans A ? Quelle est la variation d'entropie statistique au cours de cette détente ?

Faculté des Sciences de la Matière
Département de Physique

Correction de l'examen de physique statistique S5 (2025/2026)
3ème Année Physique Energétique

Question de cours: (6.0pt)

- Soit $P_n(N)$ une distribution binomiale, montrer que $\bar{n} = NP_A$

$\bar{n} = \sum_{n=0}^{N} nP_n(N) = \sum_{n=0}^{N} nC_N^n {P_A}^n {P_B}^{N-n} = n\,P_A$
(0.5pt) (1.0pt)

- Montrer que l'énergie s'un système micro-canonique s'écrit: $\bar{\mathrm{E}} = -\frac{\partial}{\partial\beta} ln(Z)$

$$\bar{E} = \frac{1}{N}\sum_i \varepsilon_i n_i = \frac{1}{N}\sum_i \varepsilon_i \frac{Ne^{-\beta\,\varepsilon_i}}{Z} = -\frac{\frac{\partial Z}{\partial\beta}}{Z} = -\frac{\partial ln(Z)}{\partial\beta}$$
(0.5pt) (0.5pt) (0.5pt)

Ou Z est la fonction de partition.

Montrer que l'entropie s'un système micro-canonique s'écrit: $S = \frac{\bar{\mathrm{E}}}{\mathrm{T}} + K_b\mathrm{T}\ln(\mathrm{Z})$

$S = -K_b \sum_i P_i \ln(P_i)$ (0.25pt) et $P_i = \frac{n_i}{N} == \frac{e^{-\beta\,\varepsilon_i}}{Z}$ (0.25pt)

$$S = -K_b \sum_i \frac{e^{-\beta\,\varepsilon_i}}{Z} \ln\left(\frac{e^{-\beta\,\varepsilon_i}}{Z}\right) = -K_b \sum_i \frac{e^{-\beta\,\varepsilon_i}}{Z} \left(-\beta\,\varepsilon_i - \ln(\mathrm{Z})\right)$$
$$= K_b\,\beta \sum_i \frac{\varepsilon_i\, e^{-\beta\,\varepsilon_i}}{Z} + K_b \ln(\mathrm{Z}) \sum_i \frac{e^{-\beta\,\varepsilon_i}}{Z}$$
$$= K_b\,\beta \sum_i \varepsilon_i \frac{n_i}{N} + K_b \ln(\mathrm{Z}) \sum_i \frac{n_i}{N} = K_b\,\beta \frac{E}{N} + K_b \ln(\mathrm{z}) = \frac{\bar{\mathrm{E}}}{\mathrm{T}} + K_b\mathrm{T}\ln(\mathrm{Z})$$
(1.5pt)

Montrer que l'énergie libre s'un système micro-canonique s'écrit: $\mathrm{F} = -K_b\mathrm{T}\ln(\mathrm{Z})$

$\bar{\mathrm{E}} = \mathrm{S\,T} - K_b \ln(\mathrm{Z}) = \mathrm{S\,T} + \mathrm{F}$ (0.5pt)

$\mathrm{F} = -K_b\mathrm{T}\ln(\mathrm{Z})$ est l'énergie libre. (0.5pt)

Ex 01: (2.5pt)

- w(x) est densité de probabilité donc $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{w(x)\ dx} = 1$ (1.0 pt)

$\bar{\mathrm{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x\, w(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x\, A\, exp}\left(-\frac{(\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)^2}{2\sigma}\right) dx = \mathrm{x}_0$ (1.5 pt)

Ex 02: (2.5pt)

- Calculer le nombre de configurations W possible.
- Calculer l'entropie S de ce système.

$w = \frac{N!}{n_1!n_2\ldots!n_i!\ldots}$ (0.5pt)

$w = \frac{5!}{1!3!1!} = 20$ (1pt)

$S = K_b ln(w) = K_b ln(20)$ (1pt)

Ex 03: (04.5pt)

- Calcule de la fonction de partition d'une molécule possédant un nombre infini de niveau d'énergie non dégénérés régulièrement espacés.

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\beta\, \varepsilon_i} = 1 + e^{-\beta\,\epsilon} + e^{-2\beta\,\epsilon} + e^{-3\beta\,\epsilon} + \cdots = \frac{1-\left(e^{-\beta\,\epsilon}\right)^{\infty}}{1-e^{-\beta\,\epsilon}} = \frac{1}{1-e^{-\beta\,\epsilon}}$$

(0.5pt) (1pt)

- Calcule de l'énergie moyenne

$$\bar{E} = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \epsilon\frac{e^{-\beta\,\epsilon}}{(1-e^{-\beta\,\epsilon})} = \epsilon\frac{1}{e^{\beta\,\epsilon}-1}$$

(0.5pt) (0.5pt)

A basse température $\beta \to \infty \implies \bar{E} \approx \epsilon e^{-\beta\,\epsilon}$ (0.5pt)

A haute température $\beta \to 0 \implies e^{\beta\,\epsilon} \approx 1 + \beta\,\epsilon \implies \bar{E} \approx \epsilon\frac{1}{\beta\,\epsilon} = k_b T$ (0.5pt)

- Calcule de la capacité calorifique

$$\mathrm{C_v} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{T}} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \mathrm{T}} = -\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \beta} k_B \beta^2 = k_B \epsilon^2 \frac{\beta^2 e^{\beta\,\epsilon}}{(e^{\beta\,\epsilon}-1)^2}$$

(0.5pt) (0.5pt)

Ex 04 : (4.5pt)

a)- A l'état final le compartiment A occupe N/3 particules et le compartiment B occupe 2N/3 particule. (0.5pt) b)-La probabilité pour qu'une molécule soit dans le compartiment A dans l'état final est 1/3. (0.5pt)

c)- La probabilité pour que les N molécules initiales soient toutes rassemblés dans A est $(1/3)^N$ (0.5pt)

Pour calculer le nombre d'état on applique la relation:

$w = \frac{N!}{n_1!n_2...!n_i!...}$ (0.25pt)

A l'état initial on N particules dans le compartiment A et 0 particules dans le compartiment B $w_i = \frac{N!}{N!0!} = 1$ (0.5pt)

$S_i = K_b ln(w_i) = K_b ln(1) = 0$ (0.5pt)

A l'état final on N/3 particules dans le compartiment A et 2N/3 particules dans le compartiment B

$w_f = \frac{N!}{\frac{N}{3}!\frac{2N}{3}!}$ (0.5pt)

$$
\begin{aligned}
S_f = K_b ln(w_f) = K_b ln\left(\frac{N!}{\frac{N}{3}!\frac{2N}{3}!}\right) \\
&\approx N ln(N) - N - \frac{N}{3} ln\left(\frac{N}{3}\right) + \frac{N}{3} - \frac{2N}{3} ln\left(\frac{2N}{3}\right) + \frac{2N}{3} \\
&= N ln(N) - \frac{N}{3} ln(N) + \frac{N}{3} ln(3) - \frac{2N}{3} ln(N) + \frac{2N}{3} ln\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= N\left(\frac{1}{3} ln(3) + \frac{2}{3} ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = N\left(ln(3) - \frac{2}{3} ln(2)\right)
\end{aligned}
$$

(0.25pt) + (0.5pt)

La variation d'entropie est

$\Delta S = S_f - S_i = N\left(ln(3) - \frac{2}{3} ln(2)\right)$ (0.5pt)