Université Ibn Khaldoun de Tiaret
Faculté des Sciences de la Matière
Département de Physique
18 janvier 2026

Master 2 Physique Médicale / U.E. : Cristaux Photoniques

Examen final

(Durée : 2h)

Exercice N°1 (**6 points** : 2 points/question)

On considère un matériau diélectrique linéaire, homogène **et** anisotrope, dans lequel les vecteurs champ électrique $\vec{E}$ et vecteur induction électrique $\vec{D}$ sont supposés uniformes. Dans ce matériau anisotrope, la permittivité diélectrique est un tenseur 3×3 qui a pour expression : $(\varepsilon) = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{D}$ a pour expression : $\vec{D} = 4\varepsilon_0 E_0 \vec{u}_x + 10\varepsilon_0 E_0 \vec{u}_y + 0\vec{u}_z$ et le vecteur $\vec{E}$ pour expression $\vec{E} = E_x\vec{u}_x + E_y\vec{u}_y + E_z\vec{u}_z$. La permittivité diélectrique du vide est ε_0 et E_0 est une valeur particulière du champ électrique. Les vecteurs $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ sont des vecteurs unitaires respectivement portés par les axes Ox, Oy et Oz d'un repère orthonormé.

1. Déterminer les composantes E_x, E_y et E_z du champ électrique en fonction de E_0.
2. En déduire l'expression du vecteur polarisation électrique $\vec{P}$ en fonction de E_0.
3. Donner l'expression du tenseur de susceptibilité électrique (χ).

Exercice N°2 (**9 points** : 1 + 1 +2 +1 + 1 + 1+1+1)

On considère deux milieux diélectriques *non absorbants* et *non magnétiques* d'indices de réfraction n_1 et n_2. Soit une onde lumineuse incidente (champ électrique $\vec{E}_1$ et champ magnétique $\vec{H}_1$), de ***polarisation magnétique transversale*** (TM), dont le vecteur d'onde $\vec{k}_1$ fait un angle θ_1 avec la normale (ou la perpendiculaire) à l'interface des deux milieux. L'onde réfractée (ou transmise dans le milieu d'indice n_2) est représentée par le vecteur $\vec{k}_2$ qui fait un angle θ_2 avec la normale à l'interface, et l'onde réfléchie est représentée par le vecteur $\vec{k}_3$ et l'angle avec la normale est noté θ_3 (Figure 1).

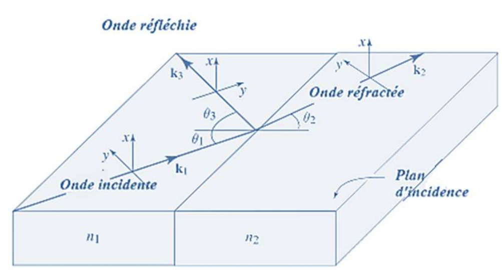


Figure 1

1. On rappelle que le trièdre $\vec{E}_1$, $\vec{H}_1$ et $\vec{k}_1$ est direct. Quels sont la direction et le sens du vecteur $\vec{H}_1$?

$(a)\ axe\ des\ x, sens\ négatif$ $(b)\ axe\ des\ x, sens\ positif$

$(c)\ axe\ des\ y, sens\ négatif$ $(d)\ axe\ des\ y, sens\ positif$

2. On rappelle que le coefficient de réflexion à l'interface s'écrit dans ce cas : $r = \frac{n_1/cos\theta_1 - n_2/cos\theta_2}{n_1/cos\theta_1 + n_2/cos\theta_2}$.

Quelle est la signification physique de $|r|^2$?

3. Dans notre cas, le coefficient de transmission s'écrit $t = \frac{2n_1co\quad_1}{n_1cos\theta_2 + n_2cos\theta_1}$.

Exprimer la quantité $(1 - |r|^2)$, appelée transmittance $\mathcal{T}$ de l'interface, en fonction de n_1, n_2, θ_1, θ_2 et t.

4. Exprimer le coefficient r en fonction des indices n_1 et n_2 et de l'angle d'incidence θ_1, en tenant compte de la loi de la réfraction : $n_1 sin\theta_1 = n_2 sin\theta_2$.

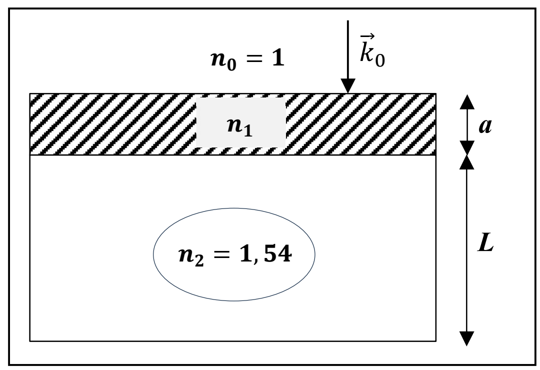
5. Calculer la transmittance $\mathcal{T}$ de *l'interface* Air/TiO_2 avec $n_1 = 1$ et $n_2 = 2{,}45$, dans le cas d'une <u>incidence normale</u> de l'onde lumineuse.

6. Même question concernant *l'interface* $Air/\ MgF_2$ avec $n_1 = 1$ et $n_2 = 1{,}38$.

7. Même question concernant *l'interface* MgF_2/TiO_2, avec $n_1 = 1{,}38$ et $n_2 = 2{,}45$.

8. En comparant les valeurs de $\mathcal{T}$ obtenues dans les trois cas (questions 5, 6 et 7), quelles conclusions pouvez-vous en tirer ?

<u>Exercice N°3</u> (**5 points** : 1 + 2 + 2)



Soit un système composé d'une couche mince diélectrique d'indice de réfraction n_1 et d'épaisseur a, comprise entre de l'air (indice de réfraction $n_0 = 1$) et d'une couche de verre (indice de réfraction $n_2 = 1{,}54$) et d'épaisseur $L \gg a$ (figure ci-contre). La couche diélectrique d'indice n_1 reçoit une onde lumineuse monochromatique en <u>incidence normale</u> et de vecteur d'onde $\lambda_0 = 540\,nm$. On rappelle que la matrice de transfert d'une couche d'indice n s'écrit : $M = \begin{pmatrix} coska & -\frac{i}{n}sinka \\ -insinka & coska \end{pmatrix}$, avec $k = k_0 n_1 = 2\pi n/\lambda_0$, le vecteur d'onde et ka le déphasage produit dans la couche considérée. Le coefficient de réflexion global de la structure bicouche de la figure est donné par $r = \frac{An_0 + Bn_2n_0 - C - Dn_2}{An_0 + Bn_2n_0 + C + Dn_2}$, avec $A = coska$, $B = -\frac{i}{n_1}sinka$, $C = -in_1 sinka$ et $D = coska$. On peut montrer, par un calcul simple, que la réflectance s'écrit : $\mathcal{R} = |r|^2 = \frac{\left[n_1^2(1-n_2)^2 - \left(n_1^2 - n_2\right)^2\right]cos^2ka + \left(n_1^2 - n_2\right)^2}{\left[n_1^2(1+n_2)^2 - \left(n_1^2 + n_2\right)^2\right]cos^2ka + \left(n_1^2 + n_2\right)^2}$.

1. Si $\mathcal{R} = 0$, et en supposant les milieux non absorbants (pas de pertes), quelle est la valeur de la transmittance $\mathcal{T}$?
2. Quelles sont les deux conditions qui doivent être remplies en même temps pour que $\mathcal{R} = 0$?
3. Montrer qu'une de ces deux conditions donne les valeurs possibles de l'épaisseur de la couche diélectrique d'indice n_1, sous la forme : $a_p = \frac{(2p+1)\lambda_0}{4n_1}$, où p est un entier ($p = 0, 1, 2, ...$).

Université Ibn Khaldoun de Tiaret
Faculté des Sciences de la Matière
Département de Physique
Master 2 Physique Médicale / U.E. : Cristaux Photoniques

Corrigé de l'examen final du 18/01/2026

(Durée : 2h)

Exercice N°1 (**6 points** : 2 points/question)

1. **Détermination des composantes E_x, E_y et E_z du champ électrique.**

La relation entre $\vec{D}$ et $\vec{E}$ s'écrit sous forme tensorielle : $\vec{D} = (\varepsilon)\vec{E}$. C'est-à-dire $\varepsilon_0 \begin{pmatrix} 4E_0 \\ 10E_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$, ce qui donne les 3 équations suivantes :

$$\begin{cases} 5E_x + 2E_y = 4E_0 & (1) \\ 2E_x + 4E_y = 10E_0 & (2) \\ E_z = 0 & (3) \end{cases}$$

Multiplions (1) par 2 et soustrayons (2) de l'équation obtenue ; on obtient $E_x = -\frac{1}{4}E_0$. En injectant cette valeur de E_x dans (2), par exemple, on obtient : $E_y = \frac{21}{8}E_0$. Donc le champ électrique s'écrit sous forme vectorielle : $\vec{E} = -\frac{1}{4}E_0\vec{u}_x + \frac{21}{8}E_0\vec{u}_y + 0\vec{u}_z$.

2. **Expression du vecteur polarisation électrique $\vec{P}$.**

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$. Donc : $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \frac{17}{4}\varepsilon_0 E_0\vec{u}_x + \frac{59}{8}\varepsilon_0 E_0\vec{u}_y + 0\vec{u}_z$

3. **Expression du tenseur de susceptibilité électrique (χ).**

D'après $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi)$, on tire la relation qui donne le tenseur de susceptibilité : $(\chi) = \frac{(\varepsilon)}{\varepsilon_0} - (I)$, où (I) est le tenseur identité 3×3 : $(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le calcul donne : $(\chi) = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice N°2 (**9 points** : 1 + 1 +2 +1 + 1 + 1+1+1)

1. Direction et sens du vecteur champ magnétique $\vec{H}_1$?

Pour une onde TM, le vecteur champ magnétique est perpendiculaire au plan d'incidence. Avec le trièdre $\vec{E}_1$, $\vec{H}_1, \vec{k}_1$ direct, la bonne réponse est (***b***).

2. Signification physique de $|r|^2$?

$|r|^2 = \mathcal{R}$, la réflectance (c'est le pourcentage de l'énergie lumineuse incidente qui est réfléchie à l'interface entre les milieux d'indices n_1 et n_2).

3. Expression de la quantité $(1 - |r|^2)$ en fonction de $n_1, n_2, \theta_1, \theta_2$ et t.

$r = \frac{n_1/co\quad_1 - n_2/cos\theta_2}{n_1/cos\theta_1 + n_2/cos\theta_2} = \frac{n_1 cos\theta_2 - n_2 cos\theta_1}{n_1 cos\theta_2 + n_2 cos\theta_1}$ et $|r|^2 = r^2 = \frac{(n_1 cos\theta_2 - n_2 cos\theta_1)^2}{(n_1 cos\theta_2 + n_2 cos\theta_1)^2}$. La transmittance est :

$$\mathcal{T} = 1 - r^2 = \frac{4n_1 n_2 cos\theta_1 cos\theta_2}{(n_1 cos\theta_2 + n_2 cos\theta_1)^2} = \frac{n_2 cos\theta_2}{n_1 cos\theta_1} t^2$$

4. **Expression du coefficient r en fonction des indices n_1 et n_2 et de l'angle d'incidence θ_1.**

$$\mathcal{T}=\frac{4n_1n_2cos\theta_1cos\theta_2}{(n_1cos\theta_2+n_2cos\theta_1)^2}=\frac{4n_1n_2cos\theta_1\sqrt{1-sin^2\theta_2}}{\left(n_1\sqrt{1-sin^2\theta_2}+n_2cos\theta_1\right)^2}=\frac{4n_1n_2cos\theta_1\sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}sin^2\theta_1}}{\left(n_1\sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}sin^2\theta_1}+n_2cos\theta_1\right)^2}$$

$$=\frac{4n_1n_2cos\theta_1\sqrt{\frac{n_2^2-n_1^2sin^2\theta_1}{n_2^2}}}{\left(n_1\sqrt{\frac{n_2^2-n_1^2sin^2\theta_1}{n_2^2}}+n_2cos\theta_1\right)^2}=\frac{4n_1\sqrt{n_2^2-n_1^2sin^2\theta_1}}{\left(\frac{n_1}{n_2}\sqrt{n_2^2-n_1^2sin^2\theta_1}+n_2cos\theta_1\right)^2}$$

5. **Calcul de la transmittance de *l'interface* Air/TiO_2 pour $n_1=1$ et $n_2=2,45$ (incidence normale).**

$$\mathcal{T}=\frac{4n_1\sqrt{n_2^2-n_1^2sin^2\theta_1}}{\left(\frac{n_1}{n_2}\sqrt{n_2^2-n_1^2sin^2\theta_1}+n_2co\quad{}_1\right)^2}=\frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}=\frac{9,8}{11,9}\approx 82\ \%$$

6. **Même question concernant *l'interface* $Air/\ MgF_2$ pour $n_1=1$ et $n_2=1,38$.**

$$\mathcal{T}=\frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}=\frac{5,52}{5,66}\approx 97\ \%$$

7. **Même question concernant *l'interface* MgF_2/TiO_2, avec $n_1=1,38$ et $n_2=2,45$.**

$$\mathcal{T}=\frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}=\frac{13,524}{14,69}\approx 92\ \%$$

8. **Comparaison des valeurs de $\mathcal{T}$ obtenues. Conclusions ?**

L'interface Air/ MgF_2 est celle qui transmet le plus la lumière, suivie de l'interface MgF_2/TiO_2. Celle qui transmet le moins parmi ces 3 interfaces, est l'interface Air/TiO_2.

Cette comparaison montre l'intérêt des couches intermédiaires (qui servent de couches anti-reflet) pour améliorer la transmission lumineuse et réduire les réflexions.

<u>Exercice N°3</u> (**5 points** : 1+2+2)

1. **Valeur de la transmittance $\mathcal{T}$ si $\mathcal{R}=0$?**

Si $\mathcal{R}=0$ (réflexion parfaite de la lumière) ➔ Comme $\mathcal{R}+\mathcal{T}=1, alors\ \mathcal{T}=1=100\%$ (transmission parfaite de la lumière à travers la couche diélectrique).

2. **Deux conditions qui doivent être remplies en même temps pour que $\mathcal{R}=0$?**

Si $n_2=1,54$ ➔ On obtient : $\mathcal{R}=\frac{\left[0,2916n_1^2-(n_1^2-1,54)^2\right]cos^2ka+(n_1^2-1,54)^2}{\left[2,54n_1^2-(n_1^2+1,54)^2\right]cos^2ka\ \ (n_1^2+1,54)^2}$.

Une **<u>transmission parfaite</u>** signifie que $\mathcal{R}=0$ ➔ $\begin{cases} cos^2ka=0 & (1) \\ (n_1^2-n_2)^2=0 & (2)\end{cases}$. Ces 2 conditions doivent être remplies ***en même temps***.

3. **Expression de l'épaisseur de la couche diélectrique d'indice n_1 sous la forme : $a_p=\frac{(2p+1)\lambda_0}{4n_1}$, $(p=0,1,2,...)$?**

(1) ➔$ka=(2p+1)\pi/2$, or $ka=2\pi n_1a_p/\lambda_0=(2p+1)\pi/2$ ➔ $a_p=\frac{(2p+1)\lambda_0}{4n_1}$

(2) ➔ $n_1=\sqrt{1,54}\approx 1,24$

<u>A.N.:</u> $\lambda_0=550\ nm$ ➔ $\boldsymbol{a_p=\frac{(2p+1)\lambda_0}{4n_1}\approx(2p+1)109\ nm}$. Valeur minimale : $\boldsymbol{a_{p=0}=109\ nm}$.